859. Lie 群ノ 1-parameter ノ部分群ガ differentiable ナル事ノ一証明

小平　邦彦

$\mathfrak{G}$ ヲ Lie 群, x, y etc ヲソノ元トシ, x ノ座標ヲ

$$(x^1, \cdots\cdots, x^n)$$

トスル. x ト y ノ積ヲ現ハス函数ヲ

$$(xy)^j = f^j(x, y)$$

トスレバ, $f^j(x, y)$ ハ連続的可微分デアル。從ッテ

$$g^j_k(x, y) = \frac{1}{x^k}\Big\{f^j(0, \cdots\cdots, 0, x^k, x^{k+1}, \cdots\cdots, x^n, y)$$

$$- f^j(0, \cdots\cdots, 0, x^{k+1}, \cdots\cdots, x^n; y)\Big\}$$

トオケバ

$$g^j_k(x, y) = \frac{\partial f^j}{\partial x^k}(0, \cdots\cdots 0, \theta x^k, x^{k+1}, \cdots\cdots, x^n; y)$$

$$(0 \leqq \theta \leqq 1)$$

ハ有界デアッテ, $\dfrac{\partial f^j}{\partial x^k}$ ノ連続性カラ, $g^j_k(x, y)$ モ連続ナル事ガ分ル。

明ラカニ

$$(1)\quad f^j(x, y) - y^j = f^j(x, y) - f^j(0, y) = \sum_{k=1}^{n} x^k g^j_k(x, y)$$

$$x(t) \qquad (-t_0 < t < t_0)$$

ヲ 1-parameter ノ連続ナ部分群トスル。(1) ニヨッテ

$$x^j(t+s) - x^j(s) = f^j(x(t), x(s)) - x^j(s)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x^k(t)\, g_k^j(x(t), x(s))$$

(1) ニ於テ $y = 0$ トオケバ

$$g_k^j(x, 0) = \delta_k^j$$

ナルコトガ分ル. 故ニ g_k^j ハ連続, 従ッテ一様連続ダカラ

$$g_k^j(x, y) = \delta_k^j + h_k^j(x, y)$$

トオケバ, $h_k^j(x, y)$ ハ $y \to 0$ ノトキ一様ニ 0 トナル.

コレヲ用ヒテ上ノ式ヲ書ケバ

$$x^j(t+s) - x^j(s) = x^j(t) + \sum_{k=1}^{n} x^k(t)\, h_k^j(x(t), x(s))$$

コレヲ s ニツイテ積分シテ

$$\int_0^{\varepsilon} x^j(t+s)\, ds - \int_0^{\varepsilon} x^j(s)\, ds$$

$$= \varepsilon x^j(t) + \sum_{k=1}^{n} x^k(t) \int_0^{\varepsilon} h_k^j(x(t), x(s))\, ds$$

$\int_0^{\varepsilon} x^j(t+s)\, ds = \int_t^{t+\varepsilon} x^j(s)\, ds = \int_0^{t+\varepsilon} x^j(s)\, ds - \int_0^{t} x^j(s)\, ds$ トオイテ見レバ, コノ式ハ

$$(2) \quad \int_{\varepsilon}^{t+\varepsilon} x^j(s)\, ds - \int_0^{t} x^j(s)\, ds = \varepsilon x^j(t) + \sum_{k=1}^{n} x^k(t) \int_0^{\varepsilon} h_k^j(x(t), x(s))\, ds$$

ト現ハサレル. 今簡単ノタメ